

Intégrales

Intégrale d'une fonction continue :

Définition: f étant continue entre deux réels a et b . On appelle intégrale de f entre

a et b c'est le réel noté et définit par
$$I = \int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F : est une primitive de f sur I (on ne tiendra pas compte de la constante)

Remarque : f est dite intégrable entre a et $b \iff f$ est continue entre a et b

Interprétation Graphique de l'Intégrale :

$I = \int_a^b f(x) dx$ définit l'aire algébrique (en ua) de la partie du plan limitée par :

- ① la courbe ($\mathcal{C}_f$) ② l'axe des abscisses ③ la droite : $x = a$ ④ la droite $x = b$.

Calculs d'Aires : Soit $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$

L'aire $\mathcal{A}$ (en ua) de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathcal{C}_f$), l'axe des abscisses

et les droites d'équation : $x = a$ et $x = b$ est
$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| dx$$

Propriétés Algébriques :

① $\int_a^a f(x).dx = 0$

② $\int_b^a f(x).dx = - \int_a^b f(x).dx$

③ $\int_a^b (\alpha.f(x) + \beta.g(x)).dx = \alpha \int_a^b f(x).dx + \beta \int_a^b g(x).dx$ (Linéarité de l'Intégrale)

④ $\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx$ (Relation de Chasles)

Propriétés d'Ordre :

⑤ si $a < b$ et $f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x).dx \geq 0$

⑥ si $a < b \implies \left| \int_a^b f(x).dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Rem : Si $a = -b$ et f impaire
alors : $\int_{-b}^b f(x).dx = 0$

⑦ si $a < b$ et $g(x) \leq f(x) \leq h(x) \implies \int_a^b g(x).dx \leq \int_a^b f(x).dx \leq \int_a^b h(x).dx$

Intégrations par Parties

Principe : U et V : deux fonctions dérivables sur I et a et b deux réels de I

alors on a : $\int_a^b U(x).V'(x) dx = \left[U(x).V(x) \right]_a^b - \int_a^b U'(x).V(x) dx$.

Valeur Moyenne de f :

Définition : Soit $a < b$ et f fonction continue sur $[a, b]$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$, le réel noté et défini par : $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Théorème d'inégalités de la Moyenne

soit m et M : deux réels, si $\forall x \in [a, b]; m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m \leq \bar{f} \leq M$

Théorème : si f continue sur $[a, b] \Rightarrow \exists$ un réel $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = \bar{f}$

Volume du Solide de Révolution

Soit $f \subset$ sur $[a, b]$, le volume $\mathcal{V}$ de solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\widehat{AB} = \{ M(x, y) / y = f(x) \text{ et } a \leq x \leq b \}$ autour de $(O \vec{i})$ est : $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

Fonctions Définies par Intégrales

Cas Particulier : $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur $I = D_{\subset f}$ qui s'annule en a

Conséquences : alors on a forcément : $\begin{cases} \textcircled{1} F \text{ dérivable sur } I \\ \textcircled{2} F'(x) = f(x) \\ \textcircled{3} F(a) = 0 \end{cases}$

Cas Généraux :

$\textcircled{1} F(x) = \int_a^{U(x)} g(t).dt = \left[G(t) \right]_a^{U(x)} = G[U(x)] - G(a)$ où G une primitive de g

Conséquences : F est dérivable ssi $\begin{cases} U : \text{dérivable} \\ U(x) \in I = D_{\subset g} \end{cases}$ et $F'(x) = U'(x).g[U(x)]$

$\textcircled{2} \varphi(x) = \int_{U(x)}^{V(x)} g(t).dt = \left[G(t) \right]_{U(x)}^{V(x)} = G[V(x)] - G[U(x)]$ / G primitive de g

Conséquences : φ est dérivable ssi $\begin{cases} U \text{ et } V : \text{dérivables} \\ U(x) \text{ et } V(x) \in I = D_{\subset g} \end{cases}$

et $\varphi'(x) = V'(x).g[V(x)] - U'(x).g[U(x)]$

Conseils de Choix pour les Intégrations par Parties :

- Le $\ln$ sera choisie comme fonction principale $U(x)$ et l'autre fonction $V'(x)$.
- En son absence, la fonction **polynôme** sera $U(x)$.
- En leur absence, le choix est quelconque à la 1^{ère} intégration et maintenir le même choix à la 2^{ème} intégration puis résoudre l'équation en I .

Calcul d'Intégrale simple

Exercice N° 01 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^3 (x^2 - 5x + 1) dx$

2) $I = \int_1^2 (3 - \frac{1}{x^2}) dx$

3) $I = \int_1^3 (x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx$

4) $I = \int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

5) $I = \int_{-2}^2 \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}} dx$

6) $I = \int_{-1}^6 |x^2 - 6x + 5| dx$

7) $I = \int_1^3 \frac{3x-2}{(x+2)^4} dx$

8) $I = \int_2^3 \frac{x}{(x^2-1)^3} dx$

9) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(\frac{\pi}{4} - 2x) dx$

10) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [3 - (\tan x)^5 - (\tan x)^3] dx$

11) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2(3x)}$

12) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^3 (\cos x)^{13} dx$

Intégrations par Parties

Exercice N° 02 : En utilisant des intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^{\pi} x \cdot \cos(3x) dx$

2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x \cdot \sin(2x) dx$

3) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos x dx$

4) $I = \int_0^{\pi} (1+x) \cdot \sin(4x) dx$

Suites définies par Intégrales

Exercice N° 03 : On considère les suites I_n et J_n définies sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cdot \sin x dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cdot \cos x dx$ 1) Montrer que $I_1 = 1$ et $J_1 = \frac{\pi}{2} - 1$ puis calculer I_2 et J_2 .2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = (n+1)J_n$ et $J_{n+1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - (n+1)I_n$. Calculer alors I_3 , J_3 , I_4 et J_4 .**Exercice N° 04 :** $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(2nx) dx$ 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Déterminer alors le terme général de la suite U_n .2) Linéariser $f(x) = (\sin x)^4$. En déduire alors la valeur de $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f(x) dx$.**Exercice N° 05 :** $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $U_n = \int_0^1 t^n \cdot \sqrt{1-t} dt$ 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$. Déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.2) Calculer U_0 et U_1 . Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \left(\frac{2n}{2n+3}\right) U_{n-1}$. En déduire les valeurs de U_2 et U_3 .**Exercice N° 06 :** Soit la suite U_n définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cdot \cos(2x) dx$ 1) Montrer que la suite U_n est une suite décroissante décroissante2) Comparer U_n et $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire que la suite U_n est convergente et calculer sa limite.4) Calculer U_0 et U_1 . Exprimer U_{n+2} en fonction de U_n . En déduire les valeurs de U_2 et U_3 .**Exercice N° 07 :** On définit la suite I_n par : $I_0 = \frac{\pi}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 t^n \cdot \sqrt{1-t^2} dt$ 1) Calculer I_1 , I_2 et I_3 .2) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} . Calculer I_5 et I_6 .**Exercice N° 08 :** Soit I_n définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ 1) Calculer I_0 , I_1 et I_2 .2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. En déduire I_3 , I_4 , I_5 et I_6 .

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < I_{n+1} \leq I_n$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+1}}$. Dédurre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$

4) Soit la suite U_n définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = (n+1)I_n \cdot I_{n+1}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\pi}{2}$

b) Montrer que : $\frac{\pi}{2(n+1)} \leq (I_n)^2 \leq \frac{\pi}{2n}$. Dédurre un encadrement de I_{1000} .

5) a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)! \pi}{(n!)^2 2^{2n+1}}$

b) Trouver une formule analogue pour I_{2n+1} .

Exercice N° 09 : Soit f la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^3}$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$

1) Vérifier que f est décroissante et positive sur $[1, +\infty[$. En déduire que la suite S_n est croissante.

2) Calculer $I = \int_1^n f(t) dt$ pour $n \geq 1$. Dédurre que $0 \leq \int_1^n f(t) dt \leq \frac{1}{2}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_1^n f(t) dt \right)$

3) a) Montrer que $\forall n \geq 2, \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$

b) Dédurre que $\forall n \geq 1, \int_2^{n+1} f(t) dt \leq S_n - f(1) \leq \int_1^n f(t) dt$ Montrer alors que $\forall n \geq 1; 1 \leq S_n \leq \frac{3}{2}$

c) Soit la suite $U_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$. Montrer que la U_n convergente et donner un encadrement de sa limite.

Fonctions définies par Intégrales

Exercice N° 10 : Soit la fonction $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

1) Déterminer le domaine de définition de F . Montrer que F est strictement croissante sur son domaine.

2) On pose $G(x) = F(tgx)$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

Calculer $G(0)$ et montrer que G est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Dédurre que $F(tgx) = x$

3) Calculer $I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $I_2 = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{1+t^2}$

Exercice N° 11 : Soit $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$

1) a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f et montrer qu'elle est dérivable sur D_f

b) Calculer $f'(x)$ et déduire son sens de variation

2) Montrer que f est une fonction impaire et déduire le domaine d'étude D_e .

3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \text{ on a : } f(x) \geq \frac{1}{2} x^2$. Dédurre la limite de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$

4) a) Montrer que $O(0,0)$ est un point d'inflexion pour $\mathcal{C}_f$ et déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en O

b) Construire $\mathcal{C}_f$ (on donne $f(1) \approx 1,2$)

Exercice N° 12 : Soit la fonction f définie sur $[-2, 2]$ par $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$

1) Etudier la fonction f et représenter sa courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.

2) Soit F la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $F(x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2} dt$

a) Montrer que F dérivable sur $[0, \pi]$ et que $F'(x) = -4 \sin^2 x$

b) Calculer $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$. En déduire que $\forall x \in [0, \pi], F(x) = -2x + \sin(2x) + \pi$

3) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, et les droites d'équations : $y = x, x = -2$ et $x = 2$.

Montrer que $\mathcal{A} = F(0) - F(\pi)$. En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Bac Math

Correction Série N° 10

Intégrales

Exercice N° 01 :

$$\textcircled{1} I = \int_0^3 (x^2 - 5x + 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x \right]_0^3$$

$$= \left(9 - \frac{45}{2} + 3\right) - (0) = -\frac{21}{2}$$

$$\textcircled{2} I = \int_1^2 \left(3 - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[3x + \frac{1}{x} \right]_1^2$$

$$= \left(6 + \frac{1}{2}\right) - (3 + 1) = \frac{5}{2}$$

$$\textcircled{3} I = \int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{x} \right]_1^3$$

$$= \left(9 - 2\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - 2\right) = \frac{32}{3} - 2\sqrt{3}$$

$$\textcircled{4} I = \int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 3 \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \right) dx$$

$$= \left[3\sqrt{x^2+1} \right]_0^1 = 3\sqrt{2} - 3$$

$$\textcircled{5} I = \int_{-2}^2 \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}} dx = \int_{-2}^2 \frac{1}{3} \cdot \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+1} \right]_{-2}^2 = \frac{1}{3}\sqrt{13} - \frac{1}{3}\sqrt{13} = 0$$

$$\textcircled{6} I = \int_{-1}^6 |x^2 - 6x + 5| dx$$

x	-∞	1	5	+∞
$x^2 - 6x + 5$	$x^2 - 6x + 5$	$x^2 - 6x + 5$	$-x^2 + 6x - 5$	$x^2 - 6x + 5$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^1 (x^2 - 6x + 5) dx + \int_1^5 (x^2 - 6x + 5) dx + \int_5^6 (-x^2 + 6x - 5) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x \right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x \right]_1^5 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x \right]_5^6$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 3 + 5\right) - \left(-\frac{1}{3} - 3 + 5\right) + \left(\frac{125}{3} - 45 + 25\right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 5\right)$$

$$+ (72 - 108 + 30) - (15 - 75 + 25)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{10}{3} + \frac{10}{3} + \frac{2}{3} - 6 + \frac{10}{3} = 32$$

$$\textcircled{7} I = \int_1^3 \frac{3x-2}{(x+2)^4} dx = \int_1^3 \frac{3(x+2) - 8}{(x+2)^4} dx$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{3}{(x+2)^3} - \frac{8}{(x+2)^4} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{3}{2} (x+2)^{-2} + \frac{8}{3} (x+2)^{-3} \right]_1^3$$

$$= \left[\frac{-3}{2(x+2)^2} + \frac{8}{3(x+2)^3} \right]_1^3$$

$$= \left(\frac{-3}{50} + \frac{8}{375} \right) - \left(\frac{-3}{18} + \frac{8}{81} \right) = \frac{296}{10125}$$

$$\textcircled{8} I = \int_2^3 \frac{x}{(x^2-1)^3} dx = \int_2^3 \frac{1}{2} (2x) (x^2-1)^{-3} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} (x^2-1)^{-2} \right]_2^3 = \left[\frac{-1}{4(x^2-1)^2} \right]_2^3 = \frac{-1}{156} + \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow I = \frac{55}{2304}$$

$$\textcircled{9} I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) dx = \left[-\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\textcircled{10} I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(3 - (\tan x)^5 - (\tan x)^3\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3 - (1 + \tan^2 x) \cdot (\tan x)^3 dx$$

$$= \left[3x - \frac{1}{4} (\tan x)^4 \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{11} I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\cos^2(3x)} = \int_0^{\frac{\pi}{12}} (1 + \tan^2(3x)) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} \tan(3x) \right]_0^{\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{3} (1) - 0 = \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{12} I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^3 (\cos x)^{13} dx$$

on a : $x \mapsto (\sin x)^3$: impaire
 $x \mapsto (\cos x)^{13}$: paire
 $x \mapsto (\sin x)^3 \cdot (\cos x)^{13}$: impaire

Comme $a = -b \Rightarrow I = 0$

Car. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^3 (\cos x)^{13} dx = 0$

$$2) I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+1} \sin x \, dx$$

on pose $\begin{cases} u = x^{n+1} \longrightarrow u' = (n+1)x^n \\ v' = \sin x \longrightarrow v = -\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \left[-x^{n+1} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{n+1} = (n+1) \cdot J_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$J_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+1} \cos x \, dx$$

on pose $\begin{cases} u = x^{n+1} \longrightarrow u' = (n+1)x^n \\ v' = \cos x \longrightarrow v = \sin x \end{cases}$

$$\Rightarrow J_{n+1} = \left[x^{n+1} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{n+1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - (n+1) I_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\cdot I_3 = 3 J_2 = 3 \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \right) = \frac{3\pi^2}{4} - 6$$

$$\cdot J_3 = \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 - 3 I_2 = \frac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6$$

$$\cdot I_4 = 4 J_3 = \frac{\pi^3}{2} - 12\pi + 24$$

$$\cdot J_4 = \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 - 4 I_3 = \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24$$

Exercice N° 04 :

$$U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(2nx) \, dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Maq $\forall n \in \mathbb{N}; \cos(n\pi) = (-1)^n$

pu $n=0$: $\cos 0 = (-1)^0 = 1$ vérifie

Supp que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ vrai $\rightarrow$

DQ $\cos((n+1)\pi) = (-1)^{n+1}$

En effet : $\begin{aligned} \cos((n+1)\pi) &= \cos(n\pi + \pi) \\ &= -\cos(n\pi) \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$

Concl : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \boxed{\cos(n\pi) = (-1)^n}$

Terme général de U_n :

• Si $n=0$: $U_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$

• Si $n \geq 1$: $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(2nx) \, dx$

on pose $\begin{cases} u = x \longrightarrow u' = 1 \\ v' = \cos(2nx) \longrightarrow v = \frac{1}{2n} \sin(2nx) \end{cases}$

$$\Rightarrow U_n = \left[\frac{x}{2n} \sin(2nx) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nx) \, dx$$

$$\Rightarrow U_n = \left[\frac{x}{2n} \sin(2nx) + \frac{1}{4n^2} \cos(2nx) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow U_n = \left[\frac{\pi}{4n} \sin(n\pi) + \frac{\cos(n\pi)}{4n^2} \right] - \left[0 + \frac{1}{4n^2} \right]$$

or $\sin(n\pi) = 0$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_n = \frac{(-1)^n - 1}{4n^2} & \text{si } n \geq 1 \\ U_0 = \frac{\pi^2}{8} \end{cases}$$

2) $f(x) = (\sin x)^4 = \left[\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right]^4$

$$= \frac{1}{16} (e^{ix} - e^{-ix})^4$$

$$= \frac{1}{16} [e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{-i4x}]$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{16} \left[\frac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2 \cos(4x)} - 4 \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2 \cos(2x)} + 6 \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{8} \cos(4x) - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}}$$

$$\cdot I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f(x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{1}{8} \cos(4x) - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8} \right) \, dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(4x) \, dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(2x) \, dx + \frac{3}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{8} U_2 - \frac{1}{2} U_1 + \frac{3}{8} U_0$$

or $U_2 = \frac{(-1)^2 - 1}{4(2^2)} = 0$ et $U_1 = \frac{(-1)^1 - 1}{4(1^2)} = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow I = 0 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{\pi^2}{8} \right)$$

d'où $\boxed{I = \frac{3\pi^2}{64} + \frac{1}{4}}$

Exercice N° 02 :

$$1) I = \int_0^{\pi} x \cdot \cos(3x) dx$$

on pose $\begin{cases} u(x) = x & \xrightarrow{u: \in \mathcal{M}(0, \pi)} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \cos(3x) & \xrightarrow{v': \in \mathcal{M}(0, \pi)} v(x) = \frac{1}{3} \sin(3x) \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{1}{3} x \sin(3x) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \sin(3x) dx$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{1}{3} x \sin(3x) + \frac{1}{9} \cos(3x) \right]_0^{\pi} = \left(0 - \frac{1}{9} \right) - \left(0 - \frac{1}{9} \right) = -\frac{2}{9}$$

$$2) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x \cdot \sin(2x) dx$$

on pose $\begin{cases} u(x) = 4x & \xrightarrow{u: \in \mathcal{M}(0, \frac{\pi}{2})} u'(x) = 4 \\ v'(x) = \sin(2x) & \xrightarrow{v': \in \mathcal{M}(0, \frac{\pi}{2})} v(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \left[-2x \cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(2x) dx$$

$$I = \left[-2x \cdot \cos(2x) + \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[(-\pi)(-1) + 0 \right] - \left[0 + 0 \right] \Rightarrow \boxed{I = \pi}$$

$$3) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos x dx$$

$\begin{cases} u(x) = x^2 & \xrightarrow{} u'(x) = 2x \\ v'(x) = \cos x & \xrightarrow{} v(x) = \sin x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \left[x^2 \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x dx$$

on pose $\begin{cases} u(x) = x & \xrightarrow{} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \sin x & \xrightarrow{} v(x) = -\cos x \end{cases}$

also $J = \left[-x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

$$\Rightarrow J = \left[-x \cos(x) + \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{also } I = \left[x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi^2}{4} + 0 - 2 \right) - (0 + 0 - 0) = \frac{\pi^2 - 8}{4}$$

$$4) I = \int_0^{\pi} (1+x) \cdot \sin(4x) dx$$

on pose $\begin{cases} u(x) = 1+x & \xrightarrow{} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \sin(4x) & \xrightarrow{} v(x) = -\frac{1}{4} \cos(4x) \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \left[-\frac{1}{4} (1+x) \cos(4x) \right]_0^{\pi} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \cos(4x) dx$$

$$\Rightarrow I = \left[-\frac{1}{4} (1+x) \cos(4x) + \frac{1}{16} \sin(4x) \right]_0^{\pi} = \left(-\frac{1}{4} (1+\pi) + 0 \right) - \left(-\frac{1}{4} + 0 \right) = -\frac{\pi}{4}$$

Exercice N° 03 :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx; \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x dx$$

$$1) I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x dx$$

on pose $\begin{cases} u = x & \xrightarrow{} u' = 1 \\ v' = \sin x & \xrightarrow{} v = -\cos x \end{cases}$

also $I_1 = \left[-x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

$$\Rightarrow I_1 = \left[-x \cos x + \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = (0 + 1) - (0 + 0) \Rightarrow \boxed{I_1 = 1}$$

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

on pose $\begin{cases} u = x & \xrightarrow{} u' = 1 \\ v' = \cos x & \xrightarrow{} v = \sin x \end{cases}$

donc $J_1 = \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

$$\Rightarrow J_1 = \left[x \sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) - (0 + 1) \Rightarrow \boxed{J_1 = \frac{\pi}{2} - 1}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

on pose $\begin{cases} u = x^2 & \xrightarrow{} u' = 2x \\ v' = \sin x & \xrightarrow{} v = -\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = \left[-x^2 \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = 0 - 0 + 2J_1 \Rightarrow \boxed{I_2 = \pi - 2}$$

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

on pose $\begin{cases} u = x^2 & \xrightarrow{} u' = 2x \\ v' = \cos x & \xrightarrow{} v = \sin x \end{cases}$

$$\Rightarrow J_2 = \left[x^2 \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$\Rightarrow J_2 = \frac{\pi^2}{4} - 0 - 2I_1 \Rightarrow \boxed{J_2 = \frac{\pi^2}{4} - 2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_n \leq I$$

$$\text{d'où } 0 \leq U_n \leq I = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+1}$$

$$\text{or } \frac{\pi}{4} \in]-1, 1[\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+1} = 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim U_n = 0}$$

d'où U_n est convergente.

$$4) . U_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx = \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin 0 \Rightarrow \boxed{U_0 = \frac{1}{2}}$$

$$. U_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \cos(2x) dx$$

$$\text{on pose } \begin{cases} f(x) = x & \longrightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = \cos(2x) & \longrightarrow g(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_1 = \left[\frac{x}{2} \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) dx$$

$$\Rightarrow U_1 = \left[\frac{x}{2} \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{8} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) - \left(0 + \frac{1}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{U_1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}}$$

$$. U_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+2} \cos(2x) dx$$

$$\text{on pose : } \begin{cases} f(x) = x^{n+2} & \longrightarrow f'(x) = (n+2)x^{n+1} \\ g'(x) = \cos(2x) & \longrightarrow g(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_{n+2} = \left[\frac{x^{n+2}}{2} \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{(n+2)}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1} \sin(2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+2} - \frac{(n+2)}{2} \cdot J$$

$$\text{on pose } \begin{cases} f(x) = x^{n+1} & \longrightarrow f'(x) = (n+1)x^n \\ g'(x) = \sin(2x) & \longrightarrow g(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow J = \left[-\frac{x^{n+1}}{2} \cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{(n+1)}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos(2x) dx$$

$$\Rightarrow J = \left(\frac{n+1}{2} \right) U_n$$

$$\text{also } \boxed{U_{n+2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+2} - \frac{(n+2)}{2} \left(\frac{n+1}{2} \right) U_n}$$

$$\text{pm } n=0 : U_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 - \frac{(2)}{2} \left(\frac{1}{2} \right) U_0$$

$$\Rightarrow \boxed{U_2 = \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{4}}$$

$$\text{pm } n=1 : U_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^3 - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{2} U_1$$

$$\Rightarrow U_3 = \frac{\pi^3}{128} - \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\text{d'où } \boxed{U_3 = \frac{\pi^3}{128} - \frac{3\pi}{16} + \frac{3}{8}}$$

Exercice N° 07 :

$$I_0 = \frac{\pi}{4}, \quad I_n = \int_0^1 t^n \cdot \sqrt{1-t^2} dt$$

$$1) . I_1 = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^1 -\frac{1}{2} (-2t) (1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\Rightarrow I_1 = \left[-\frac{1}{2} (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \left[-\frac{1}{3} (1-t^2) \sqrt{1-t^2} \right]_0^1$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{3} \right) \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{1}{3}}$$

$$. I_2 = \int_0^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^1 t (t \sqrt{1-t^2}) dt$$

$$\text{on pose } \begin{cases} u(t) = t & \longrightarrow u'(t) = 1 \\ v'(t) = t \sqrt{1-t^2} & \longrightarrow v(t) = -\frac{1}{3} (1-t^2) \sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2 = \left[-\frac{1}{3} (1-t^2) \sqrt{1-t^2} \right]_0^1 + \frac{1}{3} \int_0^1 (1-t^2) \sqrt{1-t^2} dt$$

$$\Rightarrow I_2 = +\frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt + \frac{1}{3} \int_0^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{3} I_0 + \frac{1}{3} I_2 \Rightarrow \frac{2}{3} I_2 = \frac{1}{3} I_0$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{4} I_0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{\pi}{16}}$$

$$. I_3 = \int_0^1 t^3 \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^1 t^2 (t \sqrt{1-t^2}) dt$$

$$\text{on pose : } \begin{cases} u(t) = t^2 & \longrightarrow u' = 2t \\ v'(t) = t \sqrt{1-t^2} & \longrightarrow v = -\frac{1}{3} (1-t^2) \sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_3 = \left[-\frac{t^2}{3} (1-t^2) \sqrt{1-t^2} \right]_0^1 + \frac{2}{3} \int_0^1 t (1-t^2) \sqrt{1-t^2} dt$$

$$I_3 = \frac{2}{3} \int_0^1 t \sqrt{1-t^2} dt - \frac{2}{3} \int_0^1 t^3 \sqrt{1-t^2} dt$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{2}{3} I_1 - \frac{2}{3} I_3 \Rightarrow \frac{5}{3} I_3 = \frac{2}{3} I_1$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{2}{5} I_1 = \frac{2}{5} \left(\frac{1}{3} \right) \Rightarrow \boxed{I_3 = \frac{2}{15}}$$

Exercice N° 05 :

$$\forall n \in \mathbb{N}; U_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t} dt$$

$$1) \text{ on } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{on } 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -t \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1-t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{1-t} \leq 1$$

$$\text{et } t^n \geq 0 \Rightarrow 0 \leq t^n \sqrt{1-t} \leq t^n$$

$$\text{et comme : } t \mapsto t^n \sqrt{1-t} \in \mathcal{M}([0,1])$$

$$\text{et } t \mapsto t^n \in \mathcal{M}([0,1])$$

$$\text{d'où } 0 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 t^n \sqrt{1-t} dt \leq \int_0^1 t^n dt$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq U_n \leq \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim U_n = 0}$$

$$2) U_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t} dt = \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\Rightarrow U_0 = \left[-\frac{1}{\frac{3}{2}} (1-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \left[-\frac{2}{3} (1-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow U_0 = 0 - \left(-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \boxed{U_0 = \frac{2}{3}}$$

$$U_1 = \int_0^1 t \sqrt{1-t} dt = \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}} (1-t) dt$$

$$\Rightarrow U_1 = \int_0^1 -\frac{1}{2} (1-t)^{\frac{3}{2}} - (-1) (1-t)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} (1-t)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\frac{3}{2}} (1-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow U_1 = \left[\frac{2}{5} (1-t)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (1-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow U_1 = (0 - 0) - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right) \Rightarrow \boxed{U_1 = \frac{4}{15}}$$

$$\bullet \text{ on } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n = \frac{2n}{2n+3} U_{n-1}$$

$$\text{on a : } U_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t} dt$$

$$\text{on pose } f(t) = t^n \longrightarrow f'(t) = n t^{n-1}$$

$$g'(t) = \sqrt{1-t} \longrightarrow g(t) = -\frac{2}{3} (1-t)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow U_n = \left[\frac{-2}{3} t^n (1-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + \frac{2n}{3} \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{2n}{3} \int_0^1 (t^{n-1} \sqrt{1-t} - t^n \sqrt{1-t}) dt$$

$$\Rightarrow 3U_n = 2n \int_0^1 t^{n-1} \sqrt{1-t} dt - 2n \int_0^1 t^n \sqrt{1-t} dt$$

$$\Leftrightarrow 3U_n = 2n U_{n-1} - 2n U_n$$

$$\Leftrightarrow (3+2n)U_n = 2n U_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{U_n = \frac{2n}{2n+3} U_{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\bullet \text{ pour } n=2: U_2 = \frac{4}{7} U_1 = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{15} = \frac{16}{105}$$

$$\bullet \text{ pour } n=3: U_3 = \frac{6}{9} U_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{105} = \frac{32}{315}$$

Exercice N° 06 :

$$U_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx \quad U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos(2x) dx$$

$$1) \text{ on } U_n \quad \text{on a } U_{n+1} - U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1} \cos(2x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos(2x) dx$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1} \cos(2x) - x^n \cos(2x) dx$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos(2x) (x-1) dx$$

$$\text{on } x \in [0, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow x^n \geq 0$$

$$\cos(2x) \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos(2x) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\text{et } x \leq \frac{\pi}{4} < 1 \Rightarrow x-1 < 0$$

$$\text{d'où } \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]: x^n \cos(2x) (x-1) \leq 0$$

$$\text{et comme } 0 < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos(2x) (x-1) dx \leq 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n \leq 0 \Rightarrow \boxed{U_n \searrow}$$

$$2) \text{ on a } 0 \leq \cos(2x) \leq 1$$

$$\text{et } x^n \geq 0 \Rightarrow x^n \cos(2x) \leq x^n$$

$$\text{comme } 0 < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos(2x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx$$

$$2) I_{n+2} = \int_0^1 t^{n+2} \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^1 t^{n+1} (t \sqrt{1-t^2}) dt$$

on pose : $u = t^{n+1} \rightarrow u'(t) = (n+1)t^n$
 $v = t \sqrt{1-t^2} \rightarrow v'(t) = -\frac{1}{2}(1-t^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}$

$$\Rightarrow I_{n+2} = \left[\frac{1}{3} \frac{t^{n+1}}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}} \right]_0^1 + \left(\frac{n+1}{3} \right) \int_0^1 t^n (1-t^2) \sqrt{1-t^2} dt$$

$$I_{n+2} = \left(\frac{n+1}{3} \right) \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt - \left(\frac{n+1}{3} \right) \int_0^1 t^{n+2} \sqrt{1-t^2} dt$$

$$\Leftrightarrow 3 I_{n+2} = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}$$

$$\Leftrightarrow (n+4) I_{n+2} = (n+1) I_n \Leftrightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} I_n$$

• Pour $n=2$: $I_4 = \frac{3}{6} I_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{32}$

• Pour $n=3$: $I_5 = \frac{4}{7} I_3 = \frac{4}{7} \times \frac{2}{15} = \frac{8}{105}$

• Pour $n=4$: $I_6 = \frac{5}{8} I_4 = \frac{5}{8} \times \frac{\pi}{32} = \frac{5\pi}{256}$

Exercice N° 08 :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$$

$$1) I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \left[x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{4} + 0 \right) - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$2) \text{ On a } I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

$$\text{on a } I_{n+2} = \int_0^1 (\cos x)^{n+2} dx = \int_0^1 (\cos x) (\cos x)^{n+1} dx$$

on pose $f(x) = (\cos x)^{n+1} \rightarrow f'(x) = -(n+1) \sin x (\cos x)^n$
 $g(x) = \cos x \rightarrow g'(x) = -\sin x$

$$\Rightarrow I_{n+2} = \left[\sin x (\cos x)^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x (\cos x)^n dx$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) (\cos x)^n dx$$

$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n+2} dx$$

$$\Leftrightarrow I_{n+2} = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}$$

$$\Leftrightarrow (n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n \Leftrightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

• Pour $n=1$: $I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3} (1) = \frac{2}{3}$

• Pour $n=2$: $I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{16} \right) = \frac{3\pi}{64}$

• Pour $n=3$: $I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5} \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{8}{15}$

• Pour $n=4$: $I_6 = \frac{5}{6} I_4 = \frac{5}{6} \left(\frac{3\pi}{64} \right) = \frac{15\pi}{384}$

$$3) \text{ On a } 0 < I_{n+1} \leq I_n$$

on a $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \cos x \leq 1$

or $(\cos x)^{n+1} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq (\cos x)^{n+1} \leq (\cos x)^n$

$x \mapsto (\cos x)^n \in \text{fon } [0, \frac{\pi}{2}]$

$x \mapsto (\cos x)^{n+1} \in \text{fon } [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n+1} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$$

d'où $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

• On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} \neq 0$

pour $n=0$, $I_0 = \frac{\pi}{2} \neq 0$ vérifié

suppose $I_{n-1} \neq 0$ vrai $\rightarrow (n-1)$

de $I_{n+1} \neq 0$

en effet : $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_n$

or $I_{n-1} \neq 0 \Rightarrow I_n \neq 0$
 et $\frac{n}{n+1} \neq 0$

donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < I_{n+1} \leq I_n$

$$b) \text{ On a } 1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$$

on a $I_n \searrow \Rightarrow I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$

or $I_{n+2} > 0 \Rightarrow \frac{I_{n+2}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$$

or $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \Leftrightarrow \frac{I_n}{I_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$

d'où $1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{n+2}{n+1}$

• Ques. $1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1}$

4) $\forall n \in \mathbb{N}; U_n = (n+1) I_n \cdot I_{n+1}$

a) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\pi}{2}$

• Pour $n=0, U_0 = I_0 \cdot I_1 = \frac{\pi}{2} (1) = \frac{\pi}{2}$: vérifié

Supposons que $U_n = \frac{\pi}{2}$ vrai $\rightarrow n$

Dq $U_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

en effet : $U_{n+1} = (n+2) \cdot I_{n+1} \cdot I_{n+2}$

or $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \Rightarrow U_{n+1} = (n+2) I_{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2} I_n\right)$

$\Rightarrow U_{n+1} = (n+1) I_n \cdot I_{n+1} = U_n = \frac{\pi}{2}$

Concl : $\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{U_n = \frac{\pi}{2}}$

b) Ma $\forall n \in \mathbb{N}; \frac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}$

on sait que $I_n \downarrow \Rightarrow$

$$I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$$

et comme $I_n > 0 \Rightarrow I_n \cdot I_{n+1} \leq I_n^2 \leq I_n \cdot I_{n-1}$

or $U_n = (n+1) I_n \cdot I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_n \cdot I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$

et $U_{n-1} = n \cdot I_{n-1} \cdot I_n = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_{n-1} \cdot I_n = \frac{\pi}{2n}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}}$$

c) Pour $n=1000 \Rightarrow \frac{\pi}{2002} \leq I_{1000}^2 \leq \frac{\pi}{2000}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2002}} \leq |I_{1000}| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2000}}$$

comme $I_{1000} > 0 \Rightarrow \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2002}} \leq I_{1000} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2000}}}$

5) a) Ma $\forall n \in \mathbb{N} I_{2n} = \frac{(2n)! \pi}{(n!)^2 2^{2n+1}}$

Pour $n=0, I_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{0! \pi}{(0!)^2 2^1}$ vérifié

Supposons que $I_{2n} = \frac{(2n)! \pi}{(n!)^2 2^{2n+1}}$ vrai

Dq $I_{2n+2} = \frac{(2n+2)! \pi}{(n+1)! 2^{2n+3}}$

En effet :

$$I_{n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n = \frac{(2n+1)}{2(n+1)} \frac{(2n)! \pi}{(n!)^2 2^{2n+1}} \frac{(2n+2)}{(2n+2)}$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = \frac{(2n+2)! \pi}{(n+1)! 2^{2n+3}} \quad \text{url. } \forall n \in \mathbb{N}$$

$$I_{2n} = \frac{(2n)! \pi}{(n!)^2 2^{2n+1}}$$

b) Ma $\forall n \in \mathbb{N} I_{p+2} = \frac{p+1}{p+2} I_p$

pour $p=1 \Rightarrow I_3 = \frac{2}{3} I_1$

$p=3 \Rightarrow I_5 = \frac{4}{5} I_3$

$p=2n-1 \Rightarrow I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$

Après multiplication et simplification.

on obtient : $I_{2n+1} = \left(\frac{2 \times 4 \times \dots \times 2n \cdot I_1}{3 \times 5 \times \dots \times 2n+1} \right) \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2n}{2 \times 4 \times \dots \times 2n}$

$$\Rightarrow I_{2n+1} = \frac{2^n (1 \times 2 \times \dots \times n) I_1 \cdot 2^n (1 \times 2 \times \dots \times n)}{2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (2n+1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{2n+1} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)!}}$$

Exercice N° 09 :

$f(x) = \frac{1}{x^3}$ Df = $[1, +\infty[$ $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$

1) a) $f \downarrow$ sur $[1, +\infty[$, $f'(x) = -\frac{3}{x^4} < 0$

$f(1) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$\Rightarrow f$ est décroissante sur $[1, +\infty[$

et $\forall x \in [1, +\infty[$, $f(x) \in]0, 1]$

b) $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \sum_{k=1}^n f(k) = f(n+1) > 0$

$\Rightarrow S_n$ est croissante sur $\mathbb{N}$

2) a) $I = \int_1^n f(t) dt = \int_1^n \frac{1}{x^3} dx = \int_1^n x^{-3} dx$

$\Rightarrow I = \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right]_1^n = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^n = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}}$

b) on a $f(t) > 0$ et $1 \leq n$
 $\Rightarrow \int_1^n f(t) dt \geq 0 \Leftrightarrow I \geq 0$
 et $I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : \boxed{0 \leq I \leq \frac{1}{2}}$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(t) dt = \frac{1}{2}}$

3) a) on $\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$

• $k \leq t \leq k+1 \Rightarrow f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$
 $f \downarrow$

d'où $\int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt$

$\Rightarrow \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) [t]_k^{k+1}$

$\Rightarrow \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) [k+1 - k]$

$\Rightarrow \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \quad (1)$

et $k-1 \leq t \leq k \Rightarrow f(k) \leq f(t) \leq f(k-1)$

$\Rightarrow \int_{k-1}^k f(k) dt \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$

$\Rightarrow f(k) \cdot [t]_{k-1}^k \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$

$\Rightarrow f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \quad (2)$

alors de (1) $\int_k^{k+1} f(k) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$

b) $\Rightarrow \sum_{k=2}^n \left(\int_k^{k+1} f(t) dt \right) \leq \sum_{k=2}^n f(k) \leq \sum_{k=2}^n \left(\int_{k-1}^k f(t) dt \right)$

ou $\sum_{k=2}^n \left(\int_k^{k+1} f(t) dt \right) = \int_2^{n+1} f(t) dt$

et $\sum_{k=2}^n \left(\int_{k-1}^k f(t) dt \right) = \int_1^n f(t) dt \Rightarrow$

et $\sum_{k=2}^n f(k) = S_n - f(1)$

$\Rightarrow \boxed{\int_2^{n+1} f(t) dt \leq S_n - f(1) \leq \int_1^n f(t) dt}$

c) on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_2^{n+1} f(t) dt \geq 0$ car $f(t) > 0$
 et $\int_1^n f(t) dt \leq I \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 \leq S_n - f(1) \leq \frac{1}{2}$

or $f(1) = \frac{1}{1^3} = 1 \Rightarrow 0 \leq S_n - 1 \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{1 \leq S_n \leq \frac{3}{2}}$

d) $U_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} = S_n$

or $S_n \nearrow$ et majorée par $\frac{3}{2}$

$\Rightarrow U_n$ est convergente et converge vers $\boxed{l \in [1, \frac{3}{2}]}$

Exercice N° 10 :

$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

A) on a : $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ continue sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable entre 0 et x

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{D_F = \mathbb{R}}$

• F est la primitive de $\frac{1}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0

$\Rightarrow \begin{cases} 1) F \equiv 0 \text{ sur } \mathbb{R} \\ 2) F'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ 3) f(0) = 0 \end{cases}$

d'où $F'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0 \Rightarrow F$ strict $\nearrow$

2) $G(x) = F(\tan x) \quad / \quad D_G =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

• $G(0) = F(\tan 0) = F(0) = 0$

• on a $x \mapsto \tan x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

et $(\tan x) \in \mathbb{R} = D_{\frac{1}{1+t^2}} = D_F$

$\Rightarrow G$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

• $G'(x) = [F(\tan x)]' = (\tan x)' \cdot F'(\tan x)$
 $= (1 + \tan^2 x) \left(\frac{1}{1 + \tan^2 x} \right) = 1$

d'où $G'(x) = 1 \Rightarrow G(x) = x + k$

or $G(0) = 0 \Rightarrow k = 0$ d'où $\boxed{G(x) = x}$

$$3). I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\tan \frac{\pi}{4}} \frac{dh}{1+h^2}$$

$$\Leftrightarrow I_1 = F\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$I_2 = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dh}{1+h^2} + \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^0 \frac{dh}{1+h^2}$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dh}{1+h^2} - \int_0^{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dh}{1+h^2}$$

$$= F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= F\left(\tan \frac{\pi}{6}\right) - F\left(\tan \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$I_2 = G\left(\frac{\pi}{6}\right) - G\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Exercice N° 11 :

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$$

1) a) comme $t \mapsto \sqrt{1+t^2} \in \text{som } \mathbb{R}$
 $\Rightarrow f$ est la primitive sur $\mathbb{R}$ de $\sqrt{1+t^2}$
 qui s'annule en 0

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
 d'où f est définie sur $\mathbb{R}$

b) $f'(x) = \sqrt{1+x^2} > 0 \Rightarrow f$ est
 strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) Montrons que f est impaire

on a $\forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R}$

$$\text{on pose } g(x) = f(x) + f(-x)$$

$$g'(x) = [f(x)]' + [f(-x)]'$$

$$= 1 \cdot f'(x) + (-1) \cdot f'(-x)$$

$$= \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x^2} = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = k \quad \Rightarrow k = 0$$

$$\text{or } g(0) = 0$$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + f(-x) = 0$

$$\text{alors } f(-x) = -f(x)$$

d'où f est impaire. et $D_f = \mathbb{R}$

3) On a $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geq \frac{1}{2}x^2$

$$\text{car } 1+t^2 \geq t^2 \Rightarrow \sqrt{1+t^2} \geq t \text{ car } t \geq 0$$

$$\text{or } t \mapsto \sqrt{1+t^2} \in \text{som } [0, x]$$

$$t \mapsto t \in \text{som } [0, x]$$

$$\text{impr } 0 < x \Rightarrow \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt \geq \int_0^x t dt$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x \Rightarrow \boxed{f(x) \geq \frac{1}{2}x^2}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

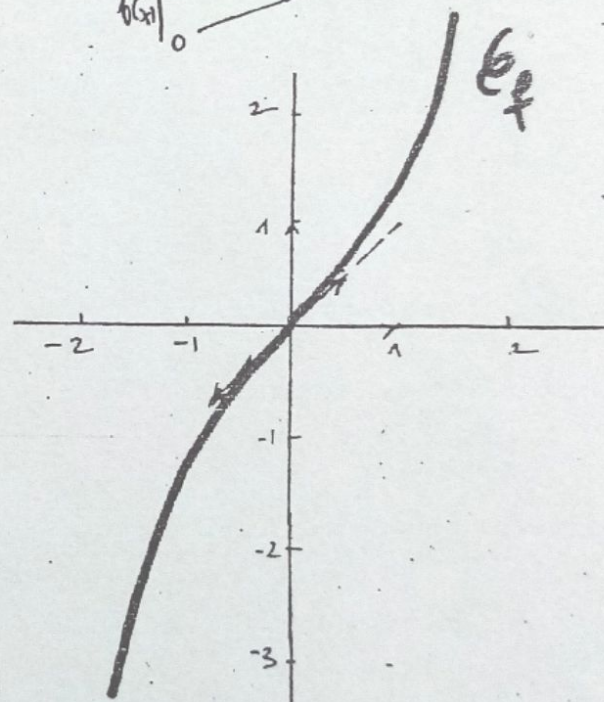
$$\cdot \frac{f(x)}{x} \geq \frac{1}{2}x \quad \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array} \right.$$

d'où f admet une branche isogène
 au voisinage de $(+\infty)$ de direction $(0, 1)$

$$4) T_0: y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$\text{or } f'(0) = 1 \text{ et } f(0) = 0 \Rightarrow T_0: \boxed{y = x}$$

$$T.V: \begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline f(x) & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} +\infty \\ \hline \end{array}$$



Exercice N° 12 :

$$f(x) = x + \sqrt{4-x^2} \quad D_f = [-2, 2]$$

1) $f \in \text{som } [-2, 2]$ car $4-x^2 \geq 0$

$f \notin \text{som }]-2, 2[$

et de f en -2^+ : $f(-2) = -2$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{(-2)^+} \frac{x + \sqrt{4-x^2} + 2}{x + 2}$$

$$= \lim_{(-2)^+} \left(\frac{x+2}{x+2} + \frac{\sqrt{4-x^2}}{x+2} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}} \right)$$

$$= \lim_{(-2)^+} \left[1 - \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)\sqrt{4-x^2}} \right] = 1 + \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$\Rightarrow f$ n'est pas $\leq$ en $(-2)^+$ et $\mathcal{C}_f$ admet en $(-2, 2)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

$\bullet$ $\leq$ de f en $(2)^-$: $f(2) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{2^-} \frac{x + \sqrt{4-x^2} - 2}{x - 2}$$

$$= \lim_{2^-} \left[\frac{x-2}{x-2} + \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}} \right]$$

$$= \lim_{2^-} \left[1 - \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\sqrt{4-x^2}} \right] = 1 - \frac{4}{0^+} = -\infty$$

$\Rightarrow f$ n'est pas $\leq$ en $(2)^-$ et $\mathcal{C}_f$ admet en $(2, 2)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

$$\forall x \in]-2, 2[, f'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}$$

d'où signe $[f'(x)] = \text{signe}[\sqrt{4-x^2} - x]$

on résout : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} - x > 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} > x \quad (\text{I}) \quad \text{et } x \in]-2, 2[$$

1^{er} cas : si $x \in]-2, 0[\Rightarrow (\text{I})$: toujours vrai

$$\Rightarrow S_1 =]-2, 0[$$

2^{es} cas : si $x \in [0, 2[\Rightarrow (\text{I}) \quad 4-x^2 > x^2$

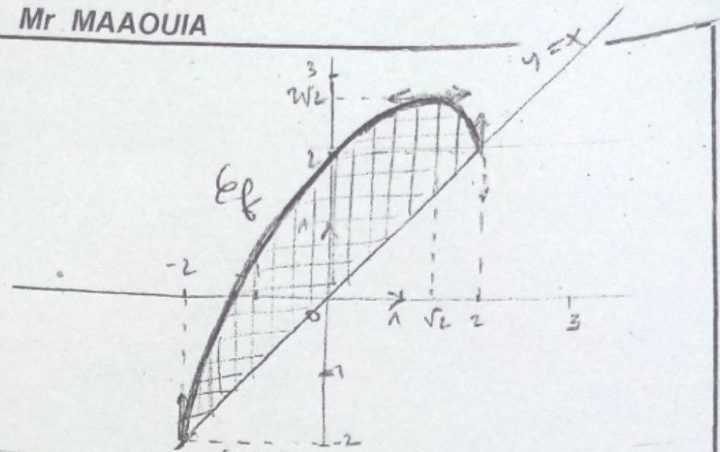
$$\Leftrightarrow 2x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 < 2 \Rightarrow |x| < \sqrt{2}$$

$$\text{alors } 0 \leq x < \sqrt{2} \Rightarrow S_2 = [0, \sqrt{2}[$$

$$\text{d'où } f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in S_1 \cup S_2 =]-2, \sqrt{2}[$$

x	-2	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$		+	-
$A(x)$		$\nearrow 2\sqrt{2}$	$\searrow 2$

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$



$$2) F(x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2} dt \quad / D_F = [0, \pi]$$

a) on pose $h(t) = \sqrt{4-t^2} \in \text{sur } [-2, 2]$

$\Rightarrow h$ admet au moins une primitive H dérivable sur $[-2, 2]$ / $H'(t) = h(t)$

$$\Rightarrow F(x) = [H(t)]_0^{2\cos x} = H(2\cos x) - H(0)$$

on $x \mapsto 2\cos x \in \text{sur } \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, (2\cos x) \in [-2, 2] = D_H$

$\Rightarrow F \in \text{sur } \mathbb{R}$ en particulier sur $[0, \pi]$

$$F'(x) = [H(2\cos x)]' - [H(0)]' = -2\sin x \cdot H'(2\cos x)$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = -2\sin x \cdot h(2\cos x) \Leftrightarrow$$

$$F'(x) = -2\sin x \cdot \sqrt{4-4\cos^2 x} = -4\sin x \cdot |\sin x|$$

$$\text{on } x \in [0, \pi] \Rightarrow \sin x \geq 0 \Rightarrow F'(x) = -4\sin^2 x$$

$$b) F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{2\cos \frac{\pi}{2}} h(t) dt = \int_0^0 h(t) dt = 0$$

$$c) F'(x) = -4\sin^2 x = -4\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right]$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = -2 + 2\cos(2x)$$

$$\text{alors } F(x) = -2x + \sin(2x) + k$$

$$\text{on } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi + k = 0 \Rightarrow k = \pi$$

$$\text{cml} : \forall x \in [0, \pi] \Rightarrow F(x) = \pi - 2x + \sin(2x)$$

$$3) A = \int_{-2}^2 (h(x) - y) dx = \int_{-2}^2 (h(x) - \sqrt{4-x^2}) dx$$

$$\Rightarrow A = \int_{-2}^2 h(x) dx - \int_{-2}^2 h(x) dx$$

$$\Rightarrow A = \int_0^{2\cos 0} h(t) dt - \int_0^{2\cos \pi} h(t) dt$$

$$\Rightarrow A = F(0) - F(\pi)$$

$$\text{on } \begin{cases} F(0) = \pi \\ F(\pi) = -\pi \end{cases} \Rightarrow A = 2\pi \quad (\text{v.a.})$$